Leñitas Geométricas

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

Nº 2 - 14 de marzo de 2019

para el Fogón Matemático de los Festivales

"Entender las matemáticas es demostrar formalmente lo que se ve intuitivamente, y ver intuitivamente lo que se demuestra formalmente". *George Polya*

EN LA PRÁCTICA DOCENTE

Tomando como marco de referencia el Acuerdo Nacional para el Mejoramiento del Aprendizaje en Matemática, en la práctica de la enseñanza debemos fijar metas cercanas y lejanas centradas en el aprendizaje. Una enseñanza efectiva de las matemáticas establece propósitos claros sobre lo que están aprendiendo los alumnos y sitúa las metas en una progresión de aprendizaje. Debemos aprovechar dichos objetivos para usar técnicas que faciliten la participación en grupos, a fin de escuchar cómo se involucran en la medida en que los problemas nos van mostrando posibilidades de soluciones óptimas. Claramente, la *visualización* responde a este objetivo.

La visualización constituye un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática; es algo muy natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la disciplina. La matemática trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante ese tipo de manipulación especial que llamamos *modelización*. ¿De qué se trata? Se da inicialmente una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer tales percepciones. El papel de la visualización es poner de relieve lo que es común, abstraíble, y someterlo a una elaboración racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones.

La aritmética, por ejemplo, surge del intento de dominar la multiplicidad presente en la realidad; con la geometría se trata de explorar racionalmente la forma y la extensión; el álgebra se ocupa de indagar, en una abstracción de segundo orden, las estructuras subyacentes a los números y a las operaciones entre ellos, es una especie de símbolo del símbolo; el análisis matemático nació con la intención de explorar las estructuras del cambio y de las transformaciones de las cosas en el tiempo y en el espacio...

Este proceso se ha manifestado extraordinariamente útil a la hora de entender mejor las estructuras comunes de las cosas y de aprovecharnos de ellas cuando lo consideramos oportuno.

La Visualización como Método de Resolución de Problemas

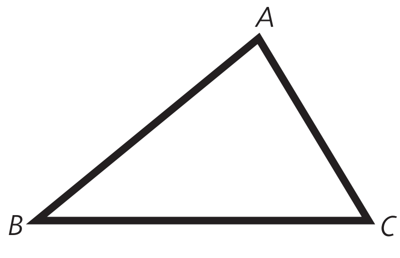
Continuamos por el sendero que nos señaló Miguel de Guzmán en el Seminario de Tucumán. Habíamos observado que el área del triángulo *ABC* es el doble del rectángulo obtenido por plegado. Es decir:

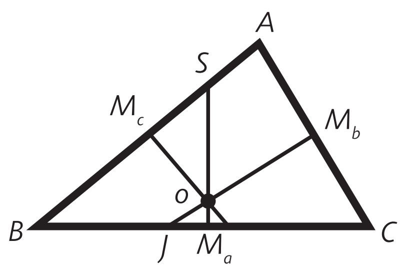
$$\text{área triángulo } ABC = 2 \text{ base rectángulo} \times \text{altura rectángulo} = \frac{1}{2} \text{ base triángulo} \times \text{altura triángulo}$$

No es un descubrimiento muy llamativo, pero prueba, por visualización, que el **área del triángulo es base por altura sobre 2.**

Pero podemos seguir encontrando otros resultados mucho más importantes. Recorta otro triángulo como el de antes, para no armarte un lío con los pliegues que en él has hecho, porque ahora vamos a hacer muchos más y más sugestivos y atrayentes.

Traza con un pliegue la mediatriz correspondiente al lado *BC*. No tienes que hacer más que un pliegue que haga coincidir *B* con *C*. Traza del mismo modo las mediatrices de los otros dos lados. A mí me queda así:

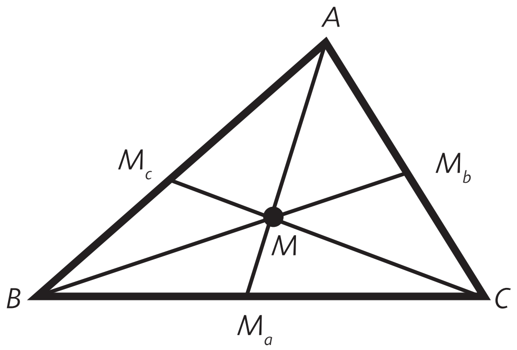




¿Qué observas?... **¡Las mediatrices se cortan en un punto!** ¿Sabrías demostrar que esto no es una casualidad, que tenía que ser así? Recuerda: M_aS es mediatriz de BC. ¿Qué propiedad tienen todos sus puntos? Todos, como M_a, están a igual distancia de B que de C. Los de la mediatriz M_bJ de AC están a la misma distancia de A que de C. Así el punto O, intersección de las dos mediatrices, está a igual distancia de los tres vértices. Pero si está a igual distancia de B que de A es que está sobre la mediatriz de AB. Por lo tanto, las tres mediatrices pasan por O y así queda resuelto el misterio. Además O está a la misma distancia de los tres vértices y es, por tanto, el centro de una circunferencia que pasa por A, B, C. ¿Tienes un compás a mano? ¡Compruébalo!

Ahora vamos a seguir experimentando

Como ya tienes los puntos medios de los lados, que hemos llamado M_a, M_b y M_c, podemos, en el mismo triángulo, trazar las medianas fácilmente mediante pliegues.

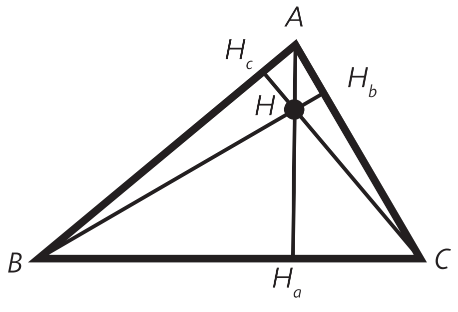


Pliega primero de modo que el pliegue contenga A y M_a; el pliegue que resulta es la mediana M_a. Pliega para obtener las otras dos. Resulta como la figura de arriba.

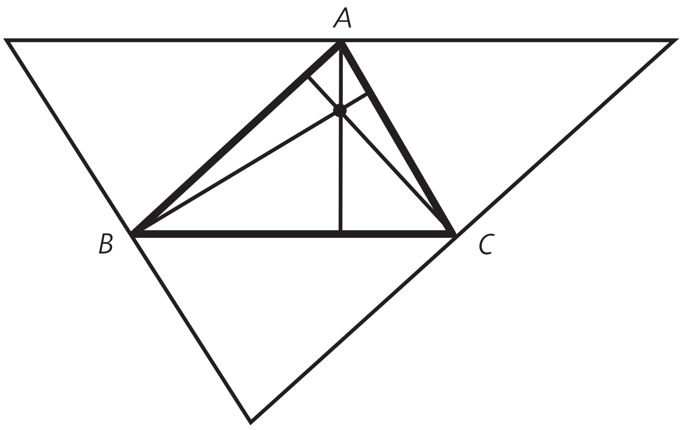
¿Qué observas?... **¡Las tres medianas se cortan en un punto!** Llámalo M. Ese punto se suele denominar **baricentro**. Eso de "bari" tiene que ver con barómetro, con la presión y con el peso. Verás por qué. Alisa bien tu triángulo y recórtalo. Coloca tu lápiz vertical con la punta hacia arriba y sobre la punta de tu lápiz coloca tu triángulo horizontal, de modo que M quede exactamente sobre la punta. **¡El triángulo queda en equilibrio horizontalmente sobre la punta de tu lápiz!** (A menos que hayas hecho una chapuza horrible con los pliegues anteriores). El punto M es el único con esta propiedad, es el centro de gravedad de tu triángulo.

Plancha bien tu triángulo. Con la punta de tu lápiz bien afilado hazle un agujero cerca del vértice A y deja colgar el triángulo pinchado en él. Verás que la línea vertical que pasa por tu agujero viene a ser precisamente la que une el agujero con el punto M. Lo mismo pasa con cualquier otro punto donde hagas el agujero. El punto M es el centro de todo el peso del triángulo. Es como si todo el triángulo tuviese concentrado su peso en el punto M. Por eso, cuando pusiste el triángulo horizontal sobre tu lápiz con la punta en M, el triángulo no sabía hacia qué lado caerse y así se quedaba en equilibrio.

En tu triángulo ABC tienes ya muchos dobleces. Vamos a hacer unos cuantos más antes de mandarlo a la papelera. Pliega para trazar las tres alturas, como hicimos al principio. Así:



¡También las tres alturas se cortan en un punto! Vamos a llamar a ese punto K. Se denomina **ortocentro** del triángulo. ¿Por qué tendrá que ser así? Con un poco de astucia resulta sencillo. Observa la figura siguiente obtenida al trazar por A la paralela a BC, por B la paralela a AC y por C la paralela a AB.



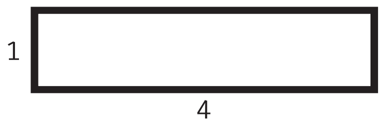
¿Qué observas?... Las alturas son las mediatrices de los lados del triángulo que ha resultado. Como las mediatrices de cualquier triángulo se cortan en un punto, nuestras alturas se cortan en un punto.

Hemos obtenido tres puntos: *O* (el circuncentro, centro de la circunferencia circunscrita al triángulo), *M* (baricentro) y *H* (ortocentro). ¿Cómo están dispuestos estos tres puntos? Pliega tu triángulo por *MH*. ¿Qué pasa? ¡El pliegue pasa también por *O*! Esa recta se llama **la recta de Euler**, que parece que fue quien primero descubrió esta propiedad de alineamiento de *O, M* y *H*.

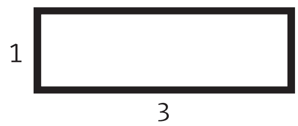
En busca de la mejor hoja para imprimir la *leñita geométrica*

Un diálogo para observar cómo llevar adelante una estrategia

El rectángulo y el cuadrado tienen bastantes cosas en común, pero al mismo tiempo tienen otras que los distinguen bien claramente. Si dices a un amigo: *"Dibújame un rectángulo"* y te contesta: *"¿Lo quieres grande o pequeño, gordo o delgado?"*, no te extrañas. Pero si le dices: *"Dibújame un cuadrado"* y te contesta: *"¿Lo quieres gordo o delgado?"*, entonces pensarás que no ha entendido bien lo que es un cuadrado. Los cuadrados pueden ser grandes o pequeños, pero no pueden ser más delgados o más gordos. ¿Sabes dónde está la diferencia? Para cualquier cuadrado la proporción entre sus lados es 1. Los rectángulos pueden tener una proporción cualquiera entre los lados desiguales.



Proporción: 1/4



Proporción: 1/3

Decir forma cuadrada es decir mucho. Decir forma rectangular es decir menos. Y menos aún es decir rectangular. Vamos a entretenernos con algunas formas rectangulares que aparecen en la vida nuestra de cada día.

¿De qué forma se debe cortar una hoja de papel?

Parece que eso depende de lo que se pretenda hacer con ella. Está claro... pero una buena idea es cortar el papel en forma rectangular, naturalmente, pero de modo que al dividir en dos el rectángulo resulten dos rectángulos cuyos lados tengan la misma proporción entre sí que los del primitivo, es decir, de tal modo que se conserve la forma. Así, si queremos partir estos dos rectángulos otra vez por la mitad, nos saldrán cuatro rectángulos de la misma forma exactamente, etc. Al partir en dos no nos salimos nunca de la misma forma de rectángulo. **¿Habrá algún rectángulo con esta curiosa propiedad?**

La hoja en la que escribí el borrador es, aproximadamente, de 21 cm × 29,7 cm. La proporción entre el lado mayor y el menor es de $\frac{29{,}7}{21} = 1{,}41$. Si divido la hoja por la mitad me salen dos hojas de 14,85 cm × 21 cm. Y ahora la proporción es de $\frac{21}{14{,}85} = 1{,}41$. Es curioso.

Me han enviado un artículo en un tipo de hoja distinta de la mía. Voy a ver si tiene la misma propiedad. La hoja mide 21,5 cm × 31,5 cm. La proporción es de 1,46. Si divido por la mitad me salen dos hojas de 15,75 cm × 21,5 cm y la proporción es 1,36. Entonces no tiene la misma propiedad que la primera, la mía. Sin embargo, si divido las que me han salido en último lugar por la mitad, obtengo cuatro hojas de 10,75 cm × 15,75 cm y la proporción del lado mayor con respecto al menor es 1,46... ¡Igual que la hoja con la que empecé! ¿Es esto último de verdad muy sorprendente? Piensa un poco... En realidad lo que estoy comprobando es que

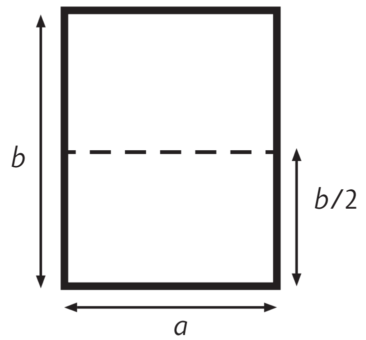
$$\frac{15{,}75}{10{,}75}=\frac{2\times 15{,}75}{2\times 10{,}75}=\frac{31{,}5}{21{,}5}$$

Así, no tiene nada de sorprendente; sucede para cualquier hoja rectangular que al dividir dos veces resulte la misma proporción entre los lados. Pero sí que es algo especial que esta proporción se repita siempre.

La hoja en la que yo escribo normalmente está hecha así con toda intención. El tamaño especial que tiene se llama DIN A-4. La del artículo que me han mandado es tamaño folio. Observa que en una hoja DIN A-4 sale el número 1,41. Tal vez te suene algo. El número es aproximadamente: $\sqrt{2}=1{,}4142135$. ¿Por qué? Piensa un poco.

Piensa un poco y calcula. Sácale el jugo a tu experiencia

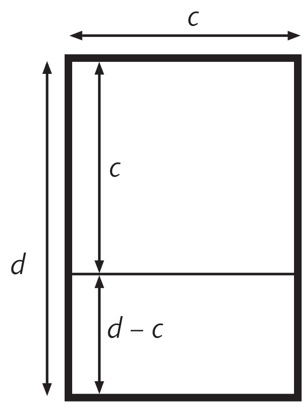
Tú quieres un rectángulo $a \times b$ tal que al cortar en dos (línea de puntos de la figura) resulten dos rectángulos con los lados en la misma proporción. Es decir, (lado mayor)/(lado menor) debe resultar el mismo número en los rectángulos pequeños y en el grande. Así tendrá que ser $\frac{b}{a}=\frac{a}{\left(\frac{b}{2}\right)}$. Por tanto $b^2 = 2a^2$ y así $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$.



El misterio queda aclarado.

Sigamos experimentando y calculando. Saca el jugo a tu experiencia

Suponte que quisieras ahora una hoja rectangular con otra propiedad curiosa. Al quitarle un cuadrado, como se indica en el dibujo siguiente, debe quedar otro rectángulo con la mismísima forma del rectángulo original. ¿Cuál debe ser la proporción $\frac{c}{d}$ para que esto pase? Mira al dibujo. Parece fácil, ¿no?



Tiene que ocurrir $\frac{c}{d}=\frac{c}{d-c}$. Así $c^2 + cd - d^2 = 0$ y, por lo tanto, $c=d\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = 0,618033...

Busca problemas interesantes en la bibliografía recomendada

Guzmán, M. de, *Experimentos de geometría* (MEC, 1986). Este es el último libro de D. Miguel de Guzmán Ozámiz. Está escrito con cariño –como dice su autor– y dedicado a todas aquellas personas que gustan de los retos matemáticos. El libro es un conjunto de ensayos cuyo trasfondo es la geometría. A lo largo de él se nota la enorme pasión que tiene Miguel de Guzmán por los temas geométricos.

Courant, R. y Robbins, H., *¿Qué es la matemática?* (Aguilar, Madrid, 1970).

García Arenas, J. y Bertrán i Infante, C., *Geometría y experiencias* (Alhambra, Madrid, 1988).

Guzmán, M. de, *Mirar y ver* (Red Olímpica, Buenos Aires, 1996; Madrid, 1975).

Envíanos los ejercicios, actividades o problemas cuyas ideas te resulten interesantes para la visualización o para preparar el Festival de Problemas.

Hasta la próxima.

Para visualizar. Algunos Lugares Geométricos

1. Construye el lugar de todos los puntos desde los que se ve un segmento bajo un ángulo dado; está formado por dos arcos de circunferencia simétricos respecto de la recta que contiene el segmento.

2. El lugar de todos los puntos cuyas distancias a dos puntos dados están en una relación dada $\frac{m}{n}$ es una circunferencia. Dibújala con GeoGebra.

3. El lugar de todos los puntos cuyas distancias a dos rectas dadas están en la relación dada $\frac{m}{n}$ se compone de dos rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas. Construye la figura con regla y compas.