De OMA para Profesores y Maestros en actividad

Leñitas Geométricas

Nº 5 - 25 de abril de 2019

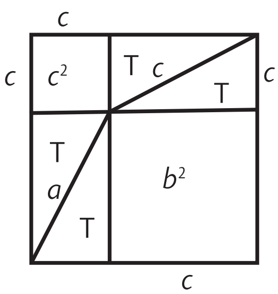
para el Fogón Matemático de los Festivales

"Entender las matemáticas es demostrar formalmente lo que se ve intuitivamente, y ver intuitivamente lo que se demuestra formalmente". *George Polya*

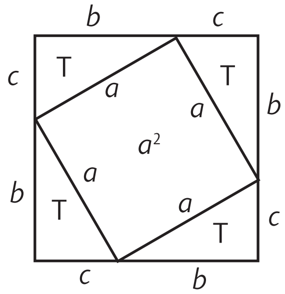
EN LA PRÁCTICA DOCENTE

Miguel de Guzmán nos pone en alerta sobre qué debemos entender cuando nos referimos a los fenómenos de visualización matemática, porque llevan consigo una carga de interpretación muy honda. En muchas de las formas de visualización que experimentamos, esta se trata de un verdadero camino de codificación y descodificación que está inmerso en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma larga historia de la actividad matemática. Esto implica que la visualización es un proceso que hay que aprender en la interacción entre las personas de nuestro entorno y en la inmersión e inculturación con el tejido histórico y social de la matemática.

La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación y que solamente la podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer en forma adecuada el tipo de comunicación que la sustenta. Miremos un ejemplo. La figura siguiente suele presentarse como paradigma de lo que constituye una demostración visual del teorema de Pitágoras.



b^2+c^2+4T



a^2+4T

Probablemente, el novicio que mira con atención esta figura vea, con suerte, dos cuadrados iguales que se han diseccionado en dos formas distintas y sea capaz tal vez de comprender, a través de las indicaciones escritas, que el cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo que ha resultado, que parece ser copia de los otros que están en diversas posiciones en la figura, tiene un área igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los dos catetos. Para llegar de ahí al teorema de Pitágoras será necesario que se pueda verificar que, efectivamente, los triángulos que resultan son iguales y que esa misma situación se repetirá para cualquier triángulo rectángulo, es decir que se trata de una situación genérica.

La pretendida absoluta inmediatez ante la anterior disección o alguna de las otras disecciones clásicas que tratan de poner de manifiesto el teorema de Pitágoras no deja de ser hasta cierto punto engañosa, pues todas ellas necesitan una labor de descodificación en la que es necesario introducir al no iniciado.

Esta consideración es una de las razones profundas de que la iniciación a la visualización, por ejemplo, en la enseñanza, sea una tarea nada fácil. Y esto es así por que requiere muy esencialmente la clara conciencia de quien la transmite sobre la transparencia del proceso, tal vez real, en razón de la familiaridad adquirida por la práctica a lo largo del tiempo. Pero puede ser inexistente para el que comienza a adentrarse en este tipo de proceso.

La presencia de este ejercicio de descodificación en cualquier visualización pone en claro lo que más nos interesa destacar ahora. Que la visualización matemática no va a ser un término unívoco ni mucho menos. Los profesores de OMA que interactuaron con Miguel saben que su libro *El Rincón de la Pizarra* está dedicado a la visualización en el Cálculo.

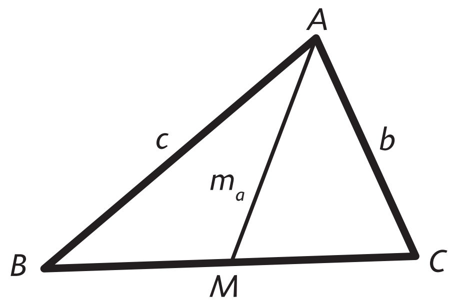
La Visualización como Método de Resolución de Problemas

Seguimos con el Seminario de Miguel de Guzman. En las imágenes visuales parecen estar sugeridos todos los elementos necesarios para desarrollar una demostración formal con todo rigor, a la que se debe recurrir cuando sea oportuno. Recordemos que las demostraciones formales son necesarias allí donde el resultado es menos evidente. Santaló decía: "Demostrar que en todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos, es llevar a los alumnos de la enseñanza media a que los matemáticos se ocupan de trivialidades", y eso también conduce al aburrimiento.

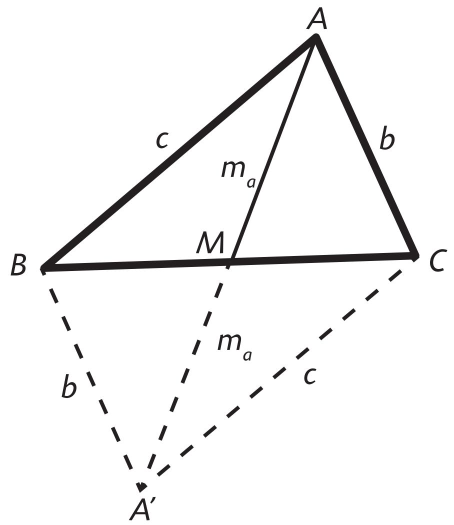
Algunas estrategias específicas de resolución de problemas. (Construcciones con regla, compás y cartabón).

Problema 1. Construir el triángulo *ABC* dados los lados *b* y *c* y la mediana m_a.

Probablemente habrás resuelto el problema fácilmente, jugando un poco con la figura que buscas.



Se te habrá ocurrido que si prolongas la mediana otro tanto y que si unes *A'* a *B* y *C*... ¡sí! resulta un paralelogramo por una sencilla igualdad de los triángulos *MAB* y *MA'C,* así como *MAC* y *MBA'*. Pero en este paralelogramo *AA'* es $2m_a$, $AC = b$, $A'C = c$ y así *AA'C* se construye fácilmente y con él, el paralelogramo *ABA'C*. Con lo que se obtiene *ABC*.

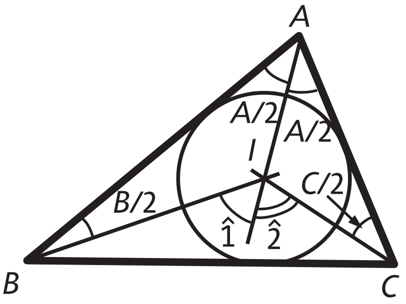


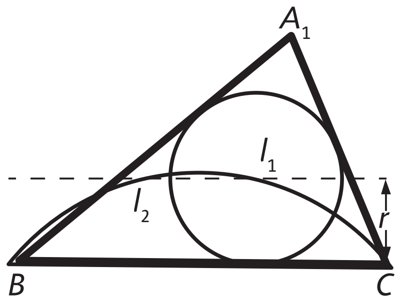
Problema 2. De un triángulo *ABC* te dan la magnitud del ángulo *A,* la longitud del lado opuesto *a* y la del radio del círculo inscripto r_i. Construye el triángulo.

Juega un poco con la figura y con los elementos que te dan. El centro *I* está en la bisectriz de *A*, de *B* y de *C*. Así, ángulo $\hat{1}$, ángulo exterior en el triángulo *IAB* vale $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ y el ángulo $\hat{2}$, análogamente, vale $\frac{A}{2}+\frac{C}{2}$. Por tanto, el ángulo *BIC* vale:

$$A+\frac{B+C}{2}=A+\frac{180^\circ-A}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

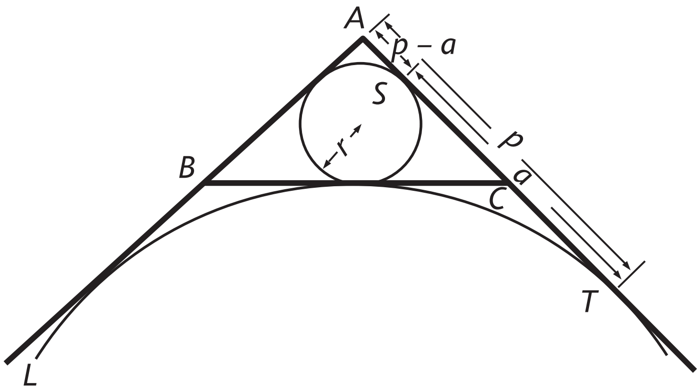
y se construye fácilmente conociendo *A*. Resulta así que 1 está en el arco de circunferencia desde donde se ve $BC = a$ bajo un ángulo $90^\circ+\frac{A}{2}$. Como la distancia de *I* a *BC* es r_i, dado, ya tenemos la solución:





Construimos sobre *a* el arco capaz de $90º+\dfrac{A}{2}$. Una paralela a *a* a distancia r_i corta al arco en las dos posibles soluciones simétricas distintas para *I*. Con centro en I_i trazamos una circunferencia de radio r_i y luego las tangentes desde *B* y *C* a ella que se cortan en A_1. Análogamente, procedemos con I_2, obteniendo así las dos soluciones simétricas A_1BC, A_2BC.

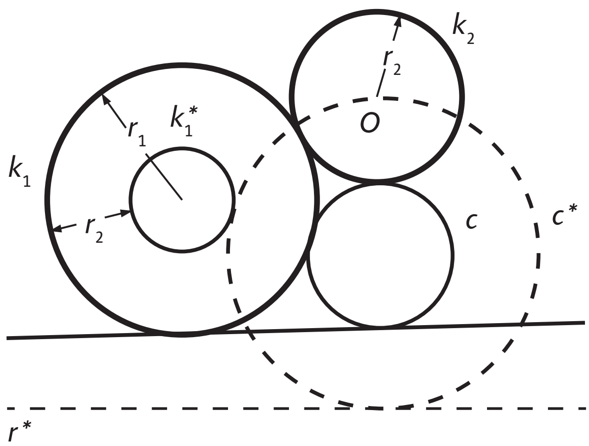
Si sabes un poco más de la geometría del triángulo lo tienes aún más fácil.



En un triángulo *ABC* como el de la figura, no es dificil ver que AS es *p – a,* siendo *p* el semiperímetro del triángulo, y $AT = p$. Así, $ST = a$. Con esto está hecho casi todo. Trazas el ángulo *A* y la circunferencia de radio *r* tangente a uno de sus lados, así obtienes *S*, y prolongando una longitud *a* obtienes *T*. Con ello puedes trazar la circunferencia *L* y luego la tangente común (dos soluciones) *BC*, que determina ya el triángulo *ABC*.

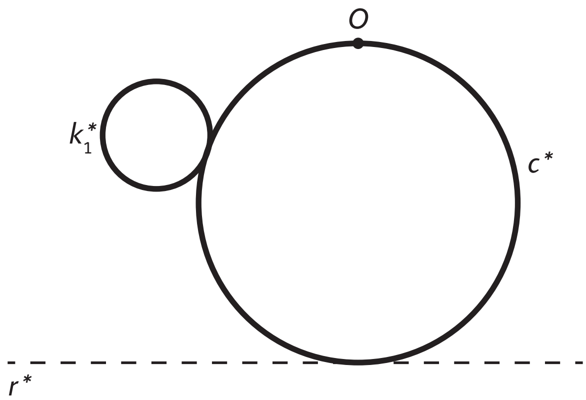
Problema 3. Te dan en el plano dos circunferencias y una recta. Construye una circunferencia tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas.

Si has pensado en una se te habrá ocurrido suponer el problema resuelto y hacerte la figura siguiente:



k_1 y k_2 son datos, así como *r*. Buscas *c*. Si supieras que *c* ha de pasar por un punto, podrías aplicar inversión...

Pero de c sabemos que ha de ser tangente a k_1, k_2, r. Bueno, si c es tangente a k_2 y trazamos c^* con el mismo centro, y radio el de c más el de k_2, entonces c^* pasa por el centro conocido O de k_2, es tangente a la recta r^* obtenida trasladando r una longitud igual a la del radio k_2, y también tangente a k_1^*, circunferencia de centro en k_1 y radio de k_1 menos el de k_2. La situación es la que indica la figura siguiente.



Si hallamos c^* tenemos c. Así, el problema queda reducido a: dados k_1^*, r^* y O, trazar c^* que pase por O y sea tangente a r^* y k_1^*.

Si aplicas una inversión de centro O y potencia cualquiera, entonces r^* va a transformarse en una circunferencia r que pasa por O, k_1^* se transforma en una circunferencia S, que no pasa por O, y c^*, que aún no conocemos, se transformará en una recta p tangente a r y a s. Como r y s se construyen fácilmente, p puede ser una de las cuatro rectas tangentes a la vez a r y s, que se construyen fácilmente. Deshacemos la inversión y obtenemos cuatro soluciones para c^* que proporcionan cuatro soluciones posibles, en general, para c.

Polígonos construibles

En matemática, un polígono construible es un polígono regular que puede ser construido con regla y compás. Por ejemplo, un pentágono regular es construible con regla y compás, mientras que un heptágono regular no lo es.

¿Qué condiciones necesita un polígono para ser construible? La construcción de los polígonos regulares de 3, 4, 5 y 15 lados, así como los polígonos obtenidos de los anteriores, multiplicando el número de lados por una potencia de dos, o sea, por bisecciones sucesivas de ángulos. Es entonces natural que nos preguntemos por los demás polígonos regulares que se puedan construir con los instrumentos de Euclides.

El primer avance significativo lo consiguió 2000 años después en 1796 Gauss, quien demostró que el polígono regular de 17 lados o heptadecágono era construible con regla y compás. Cinco años más tarde desarrolló la teoría de los periodos gaussianos. Esta teoría le permitió formular una **condición suficiente** para la constructibilidad de los polígonos regulares:

[...] a fin de poder dividir geométricamente el círculo en N partes, N debe ser 2 o una potencia más alta de 2, o un número primo de la forma $2^m + 1$ (primos de Fermat), o el producto de varios números primos de esta forma, o el producto de uno o varios de tales números primos por 2 o por una potencia más alta de 2. Gauss conjeturó que esta condición era también necesaria, pero no dio ninguna prueba de esta afirmación.

En el Seminario de referencia se puso el acento en extender los instrumentos para que muchas de las construcciones imposibles con regla y compás puedan llevarse a cabo fácilmente con el sistema más potente, aunque físicamente sea muy sencillo, de papeles doblados denominado “origami”. Los axiomas de Huzita (tipos de operaciones de doblado) permiten construir extensiones cúbicas (raíces cúbicas) de longitudes dadas, en tanto que con regla y compás solo pueden construirse extensiones cuadráticas (raíces cuadradas)

El origami también tiene una vertiente matemática más que evidente.

Dependiendo de las preferencias de cada plegador, o de su sistema de creación, los pliegues no son más que operaciones de simetría, a veces bastante complejas, y pueden ser ideadas y estudiadas metodológicamente en términos geométricos.

El carácter matemático que pueda tener el plegado de papel no está reñido con el lado artístico, aunque tampoco tiene por qué coincidir. Por ejemplo, en el aspecto científico del origami podemos mencionar a los aficionados que se dedican a demostrar teoremas geométricos utilizando solo el papel y las hipótesis, al punto de ser teoremas; incluso hay trabajos publicados sobre la resolución de ecuaciones de tercer grado solo doblando el papel.

A finales del siglo XIX, Friedrich Fröbel incorpora y desarrolla el origami como técnica de enseñanza a nivel escolar. Rápidamente es adoptado en los jardines infantiles japoneses por la utilidad en el preescolar para enseñar las figuras geométricas, entre otros beneficios que brinda el origami en la educación. Por esta época, un vendedor europeo llevó a Tokio papel de colores, desconocido allá, el cual tuvo tan amplia acogida que hizo que el origami mejorara su calidad en la realización de los modelos.

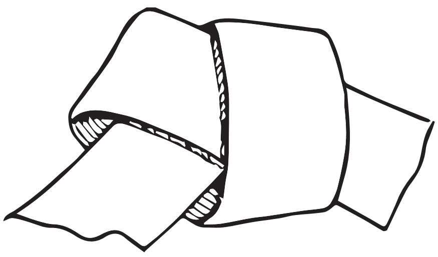
Quien impulsó el origami fue el escritor español Miguel de Unamuno alrededor de la década de 1930. Hasta entonces, el origami apenas había tenido influencia en España, pese a haber sido introducido por los árabes en la Europa Medieval. Por eso cobra notoria importancia Miguel de Unamuno, pues es el primero que realmente se tomó en serio hacer "pajaritas de papel".

Otro de los aspectos por los que se destacó fue por escribir, además de multitud de obras literarias de gran relevancia, una especie de tratado acerca de la *'cocotología'*, derivado de 'cocotte', que significa algo así como 'gallina' o 'pajarita' en francés. Además, Miguel de Unamuno publicó varios libros de plegado, entre ellos el ensayo "Amor y Pedagogía", es por esto que no debe extrañarnos que Miguel nos desafiara con el plegado de una hoja de papel.

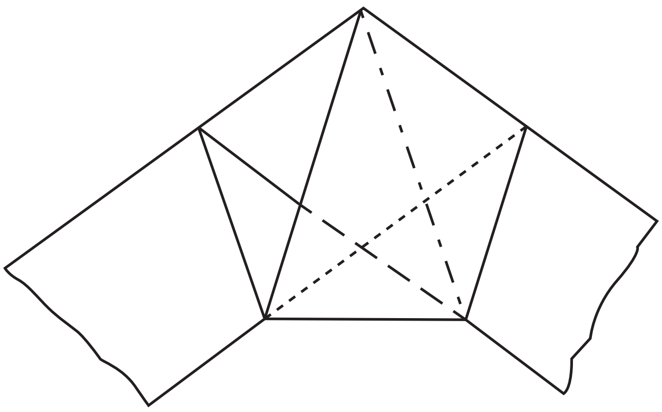
Vamos a continuar con nuestra colección de polígonos regulares

Sigamos por el pentágono

Este es un poco más rebuscado. ¿Se podrá hacer con la tira? ¿Qué más podemos hacer con la tira? Piensa, piensa... Después de mucho pensar, es posible que no se te ocurra nada más que hacerte una corbata con la tira y... ¡mira por dónde! esa es la pista para el pentágono regular. Haz un nudo con la tira, solo plegando, sin arrugarla, primero así:



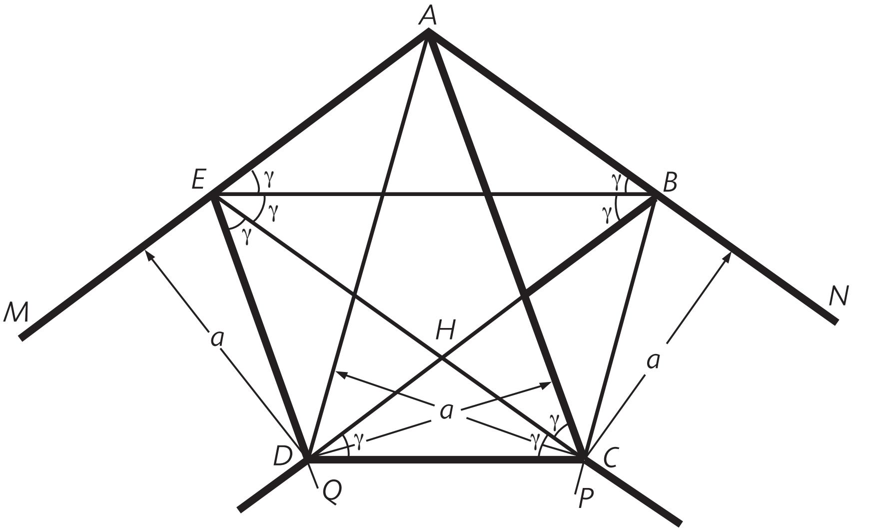
y luego plegando con cuidado hasta que quede del siguiente modo:



En línea de puntos van las partes del borde de la tira que no se ven. Ahí tienes el pentágono regular, recortando la tira y pintando solo los bordes.

¿Sabrías demostrar que efectivamente todos sus lados y todos sus ángulos son iguales? Aquí tienes un esquema de la demostración.

Esquema de la demostración de que anudando la tira de papel resulta un pentágono regular. Partimos de que la tira tiene sus bordes paralelos y de que hemos logrado plegarla de la forma que se indica en la figura.

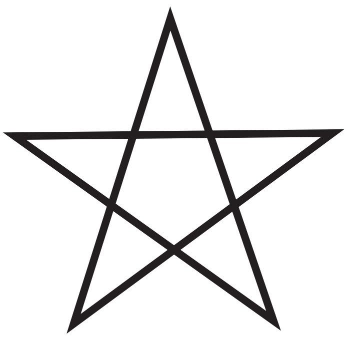


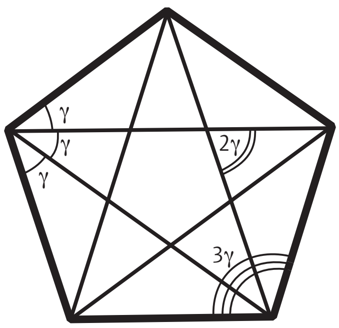
Con facilidad, usando el hecho de que la anchura de la tira es a, constante, podrás demostrar primero que $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son simétricas respecto de la mediatriz de $\overrightarrow{DC}$.

Asimismo, son simétricas, usando el mismo hecho, las rectas $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AN}$. Y también $\overrightarrow{CP}$ es simétrica de $\overrightarrow{DQ}$. Por tanto $AE = AB$ y, además, son simétricas respecto de la mediatriz de DC. Con esto queda demostrado que $\overline{ED} = \overline{BC}$ y que $\overline{EB}$ es paralela a $\overline{DC}$. Como $ABHE$ es un rombo resulta $AEB = HEB$. De modo parecido se demuestra $\overline{AD} = \overline{DB}$ y $\overline{AE} = \overline{BC}$, por simetría respecto de la mediatriz de $\overrightarrow{AB}$. Así $\overline{ED} = \overline{DC}$ y $HED = BED = \gamma$. Con esto resulta ya fácilmente que todos los ángulos del pentágono son iguales y los lados también y que $\gamma = 36^o$.

Las pitagóricas maravillas del pentágono regular

El pentágono regular es una de las figuras con más miga de toda la historia antigua de la matemática. Si trazas sus diagonales obtienes el pentagrama pitagórico, la figura que los seguidores de Pitágoras utilizaban en el siglo VI a. de C. para reconocimiento mutuo y como símbolo de salud.



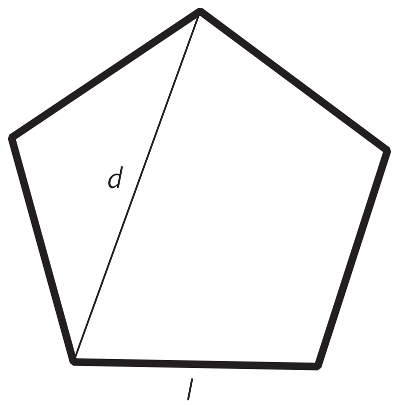


Al construir la estrella pitagórica, en el centro se forma otro pentágono regular. Si mides los ángulos que se forman en el pentágono, señalados en la figura anterior, observarás una cosa curiosa: si por abreviar llamas γ al ángulo de 36º resulta que todos los ángulos que aparecen miden un múltiplo entero de γ, como está indicado.

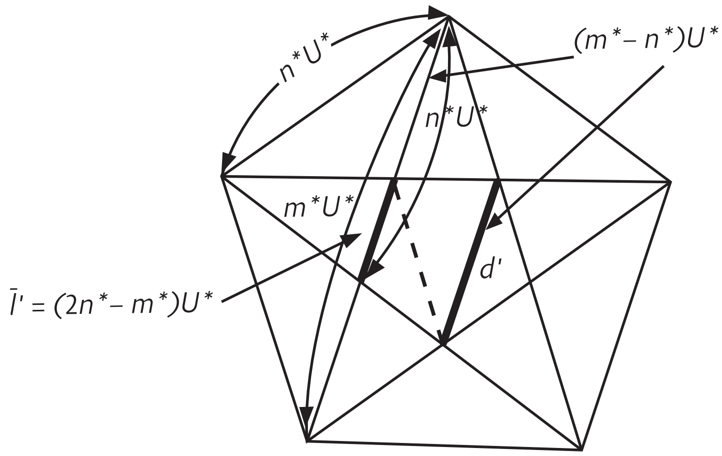
A los pitagóricos, que eran grandes devotos de las proporciones exactas, esto les tuvo que sumir en un profundo éxtasis; de ahí su veneración al pentagrama. Y esta misma idea de tratar de encontrar proporciones exactas entre magnitudes geométricas les llevó por primera vez –como sospechan los historiadores de la matemática– mediante el pentágono regular precisamente, a uno de los descubrimientos matemáticos más importantes: la inconmensurabilidad de ciertos segmentos. Verás en qué consiste esto.

Era natural para los pitagóricos esperar que, en una figura tan perfectísima como el pentágono regular, el lado l y la diagonal d fuesen conmensurables, es decir, admitiesen una unidad de medida común. En otras palabras, que existiese un segmento u más pequeño que d y l con el que l y d se pudieran medir a la vez: que d resultase ser m veces u y l fuese n veces u, siendo m y n números enteros.

¿Ocurrirá que $d = mu$, $l = nu$, siendo m y n números enteros?



Si $\frac{m}{n}$ no fuese una fracción irreducible, por ejemplo, $m = m'p$, $n = n'p$, entonces es claro que podemos tomar como segmento unidad $U = pu$, y con esta unidad resulta que d mide m' veces U y l mide n' veces U, es decir, U sirve también para medir d y l. Si todavía m' y n' tuviesen un factor común, podríamos tomar una unidad más grande. Como ves, si existe una unidad u que sirve para medir a la vez d y l en enteros, también existe una unidad U^* que sirve para medir d y l con m^* y n^* tales que $\frac{m^*}{n^*}$ es una fracción irreducible. Supongamos que existe tal u y que hemos tomado U^* por unidad. Así, d mide m^*U^* y l mide n^*U^*, siendo $\frac{m^*}{n^*}$ irreducible.



Pero ahora fácilmente, apoyándote en lo que sabes sobre los ángulos de la figura del pentágono y sus diagonales, observarás que las medidas de los segmentos indicados en la figura son las señaladas; en particular, que la diagonal d' del pentágono regular interior resulta ser $(m^*- n^*)\,U^*$ y el lado l' del mismo pentágono interior es $(2n^* - m^*)\,U^*$. Como dos pentágonos regulares cualesquiera son semejantes, resulta que $\frac{d}{l} = d'/l'$ y, por tanto,

$$\frac{m^*}{n^*} = \frac{m^* - n^*}{2n^* - m^*},$$

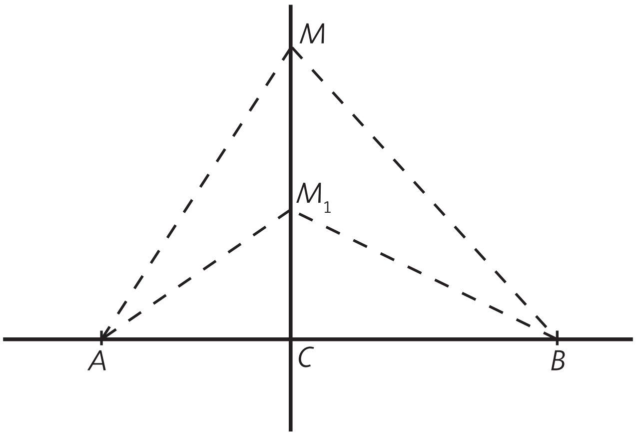
lo cual quiere decir que $\frac{m^*}{n^*}$ no era irreducible, contra lo que habíamos supuesto.

Algo no pasa. ¿Qué puede ser? Nuestro razonamiento es bueno. Entonces nuestro punto de partida tiene que ser malo. Habíamos partido de que existe u tal que $d = mu$, $l = nu$. Esto tiene que ser falso.

En resumen, d y l no pueden ser conmensurables, es decir, no se puede encontrar una unidad u con la que se pueda medir a la vez d y l en números enteros.

Algunos modelos para las construcciones geométricas

Hallar el lugar geométrico de los puntos en que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos A y B es un número constante k^2.



Veremos que es una recta perpendicular a la recta determinada por los puntos fijos dados. En efecto, trazamos una perpendicular por un punto C, interior del segmento $\overline{AB}$, y elegimos un punto M que es uno de los puntos buscados. Tomemos ahora otro M_1 de la misma perpendicular, los segmentos $\overline{AM_1}$ y $\overline{BM_1}$, podrá observarse que se cumple:

$$\overline{AM_1}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{M_1C}^2 \;;\quad \overline{BM_1}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{M_1C}^2 \text{, de donde:}$$

$$\overline{AM_1}^2 - \overline{BM_1}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 \quad \text{y} \quad \overline{AM}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = k^2$$

Un resultado trascendente a propósito de esta construcción que es **potencia de un punto respecto de una circunferencia**, como veremos más adelante.

Para visualizar

1. Construir un círculo C tangente a dos rectas paralelas $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ y que pase por un punto M dado.

2. Trazar una recta $\vec{a}$ que pase a la distancia m y n de dos puntos fijos A y B.

3. Hallar un punto P tal que las distancias a las tangentes trazadas por P a las tres circunferencias C_1, C_2, C_3 sean iguales.

4. Dado un triángulo rectángulo ABC, trazar una circunferencia tangente a la hipotenusa, que pase por el vértice del ángulo recto y tenga su centro sobre uno de sus catetos.

5. Construir un triángulo ABC conociendo $\vec{a}$, A, h_a.