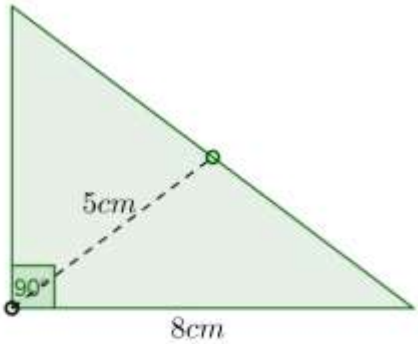
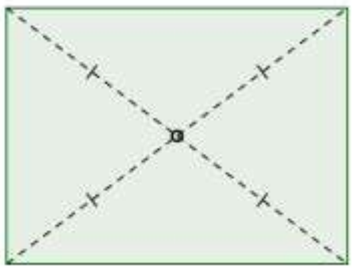
Nivel Inicial

Problema 1. Hallar el perímetro de un triángulo rectángulo que tiene un cateto de *8cm* y una mediana de *5cm*, tal como se indica en la figura.

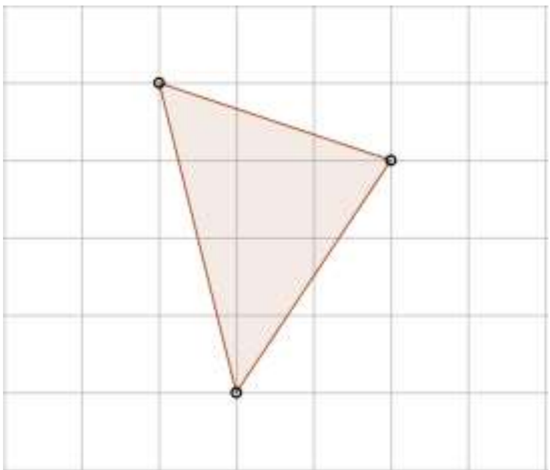


Solución: En todo rectángulo, las diagonales son de igual longitud y se cortan en sus puntos medios.

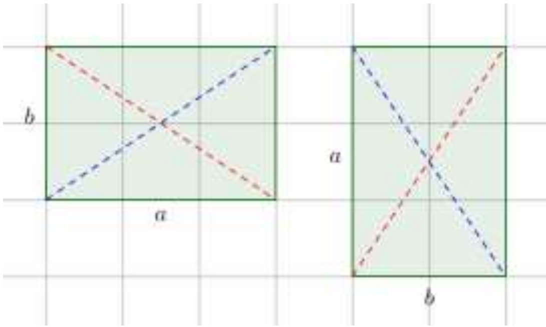


De modo que la mediana, marcada en el triángulo del problema, mide la mitad de lo que mide la hipotenusa. Así, la hipotenusa es de *10cm* y por el Teorema de Pitágoras, el otro cateto mide *6cm* siendo el perímetro del triángulo igual a *24cm*.

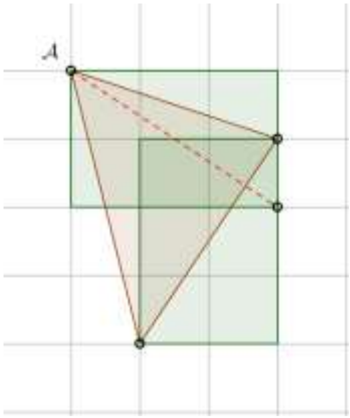
Problema 2. Usando sólo regla, lápiz y los puntos de la cuadrícula, indicar cómo ubicar el ortocentro del triángulo dado en la figura. *El ortocentro es el punto de intersección de las prolongaciones de las alturas del triángulo*.



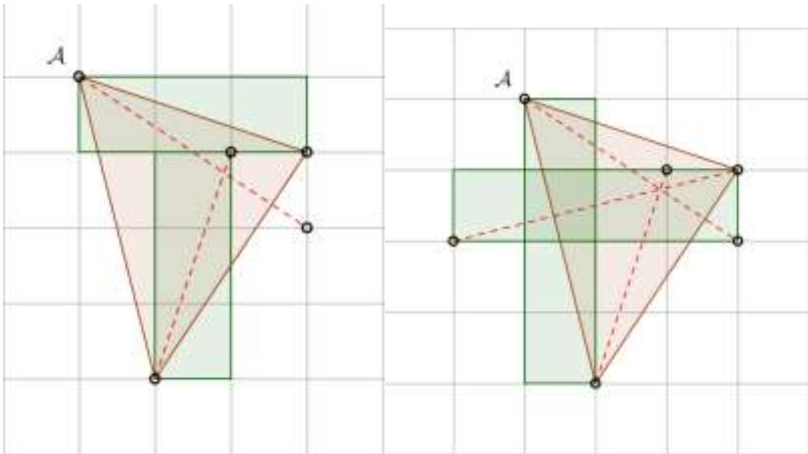
Solución: Si dibujamos dos rectángulos: uno de ancho *a* y alto *b* y otro de ancho *b* y alto *a*, para ubicar uno en el otro es necesario rotar *90º*, es decir que cada segmento en uno de los rectángulos se corresponde con un segmento en el otro rectángulo de modo que dichos segmentos son perpendiculares entre sí. En particular esto ocurre con las diagonales, como muestra la figura, las diagonales marcadas con el mismo color son perpendiculares entre sí.



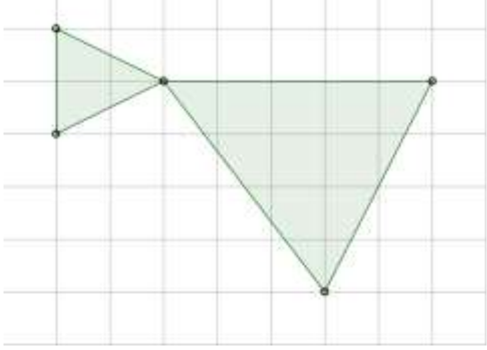
Para trazar la altura desde el vértice *A*, dibujamos los rectángulos dados en la figura.



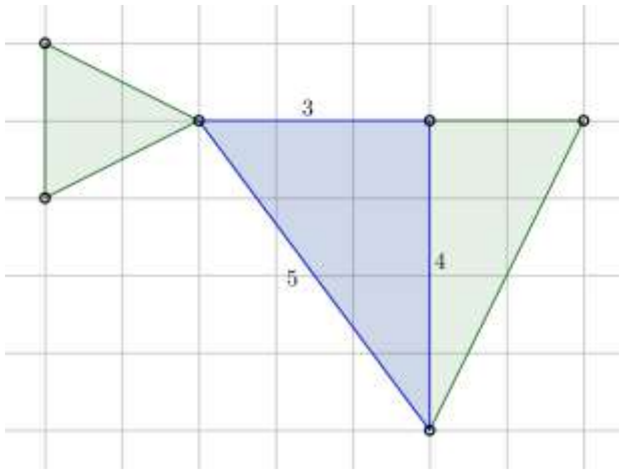
En forma análoga, trazamos las otras alturas.



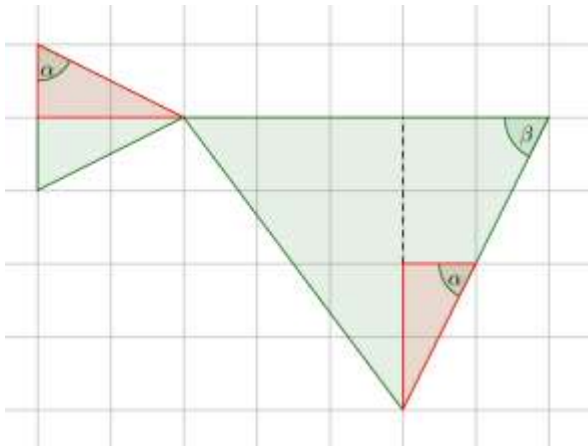
Problema 3. ¿Son semejantes los triángulos sobre la cuadrícula dados en la figura?



Solución: Es claro que el triángulo más chico es isósceles. Si usamos la longitud de los lados de los cuadrados de la cuadrícula, el triángulo más grande tiene un lado que mide *5* unidades y por el Teorema de Pitágoras aplicado sobre el triángulo destacado en la figura con color azul, vemos que tiene otro lado de *5* unidades.

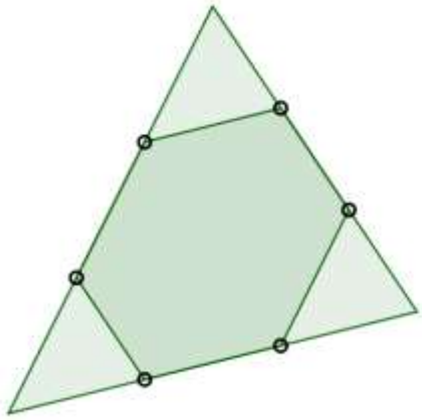


Ambos triángulos son isósceles. La siguiente figura muestra dos triángulos congruentes coloreados en rojo y los ángulos α y β, que son iguales por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Como α es igual a β, los triángulos dados tienen los mismos ángulos, luego son semejantes.

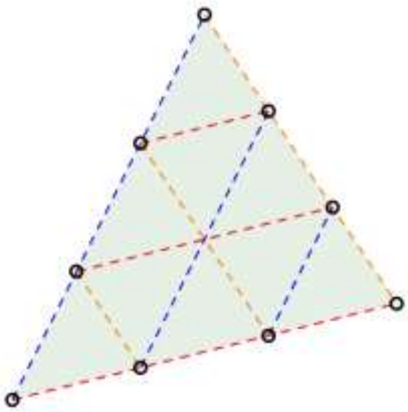


Primer Nivel

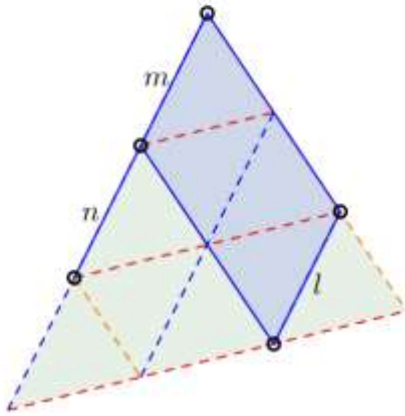
Problema 1. Los lados de un triángulo, de *12cm* de perímetro, se dividen en tres partes iguales por los puntos indicados en la figura. Hallar el perímetro del hexágono que tiene por vértices a dichos puntos.



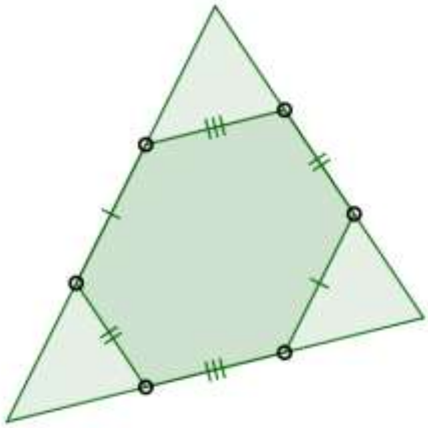
Solución: En virtud del Teorema de Thales los segmentos en la figura trazados con un mismo color, son paralelos.



El paralelogramo destacado en la siguiente figura, muestra que el lado *l* del hexágono es de igual longitud que el lado opuesto *n*.

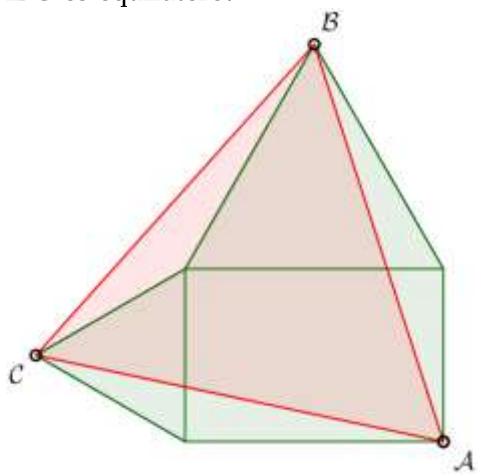


Esto mismo ocurre con los otros pares de lados opuestos del hexágono.

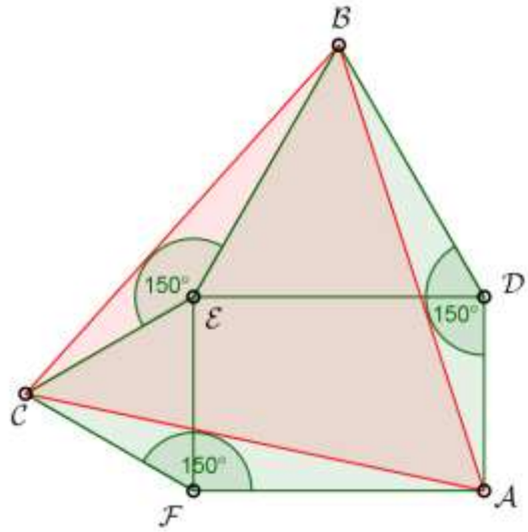


El perímetro del hexágono es $\frac{2}{3}$ del perímetro del triángulo, es decir *8cm*.

Problema 2. Sobre dos lados de un rectángulo se dibujan triángulos equiláteros como se indica en la figura. Mostrar que *ABC* es equilátero.

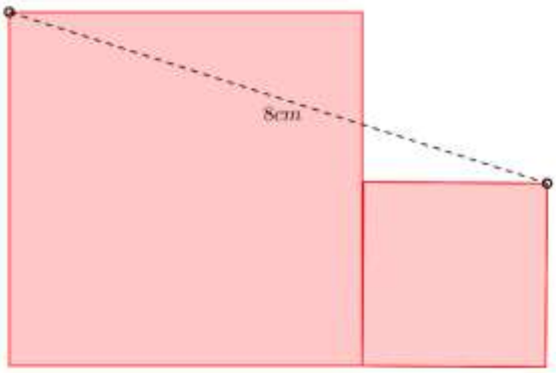


Solución: Los triángulos *ADB*, *CFA* y *CEB* son congruentes, por tener cada uno de ellos dos lados con las medidas de los lados del rectángulo y el ángulo comprendido de *150º*.



Resultan *AB*, *BC* y *CA* de igual longitud.

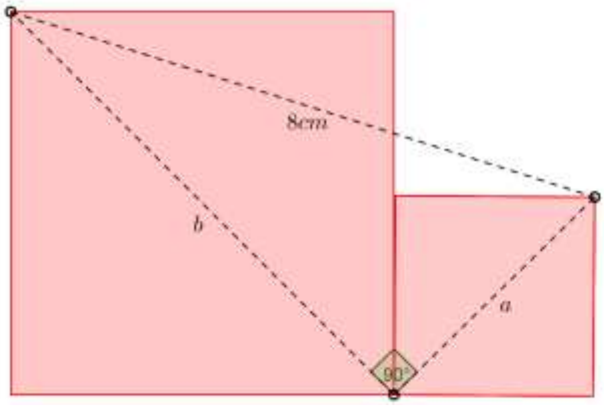
Problema 3. Con los datos de la figura, hallar el área de la pieza formada por los dos cuadrados.



Solución: El área de un cuadrado es un medio del cuadrado de la longitud de su diagonal. Si *a* y *b* son las longitudes de las diagonales de los cuadrados dados, el área buscada es:

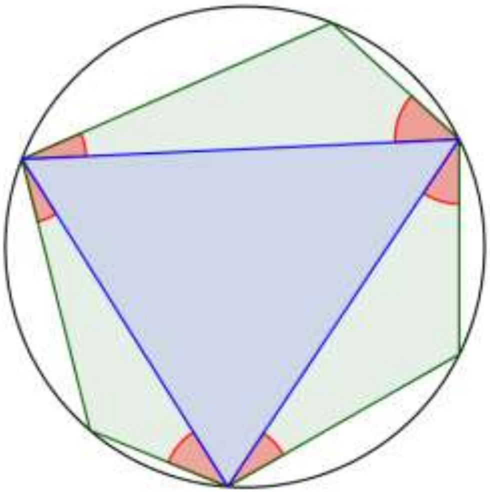
$$\frac{a^2}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}$$

Por el Teorema de Pitágoras, resulta $a^2+b^2=8^2=64$, de donde el área buscada es *32cm²*.

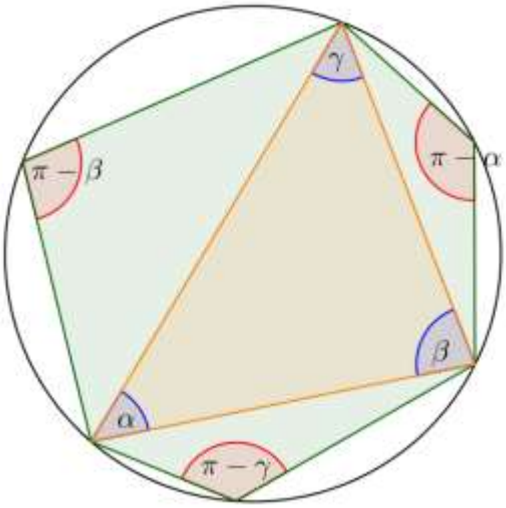


Segundo Nivel

Problema 1. La figura muestra un hexágono y un triángulo inscriptos en una circunferencia. Hallar la suma de los valores de los ángulos indicados.



Solución: Las medidas de los ángulos inscriptos en una circunferencia, en ambos lados de una cuerda, suman *180º*, o sea π.

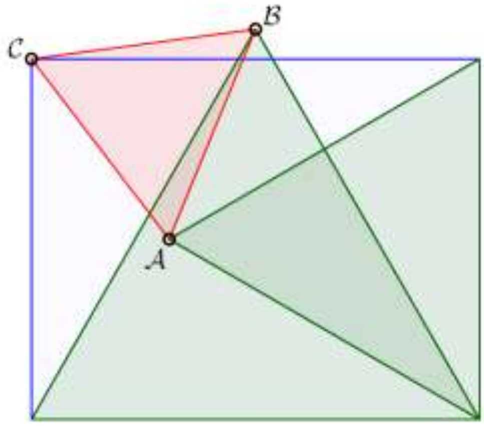


La suma de los ángulos en la figura precedente, marcados en rojo, es:

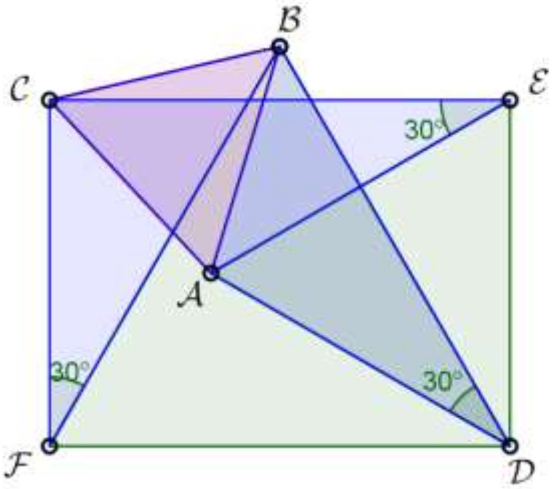
$$\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma = 3\pi - (\alpha + \beta + \lambda) = 2\pi$$

En consecuencia, la suma buscada es $2\pi - \pi = \pi$.

Problema 2. Sobre dos lados de un rectángulo se dibujan triángulos equiláteros como se indica en la figura. Mostrar que *ABC* es equilátero.

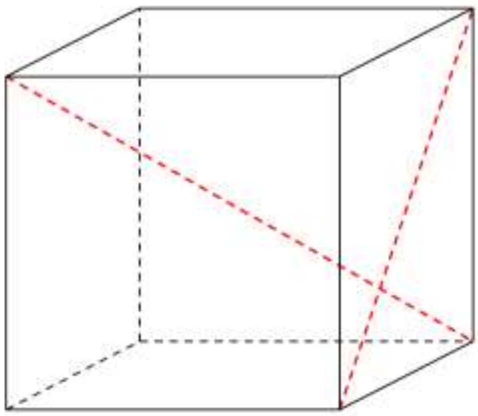


Solución: Los triángulos *ADB*, *AEC* y *BCF* son congruentes, por tener cada uno de ellos dos lados con las medidas de los lados del rectángulo y el ángulo comprendido de *30º*.

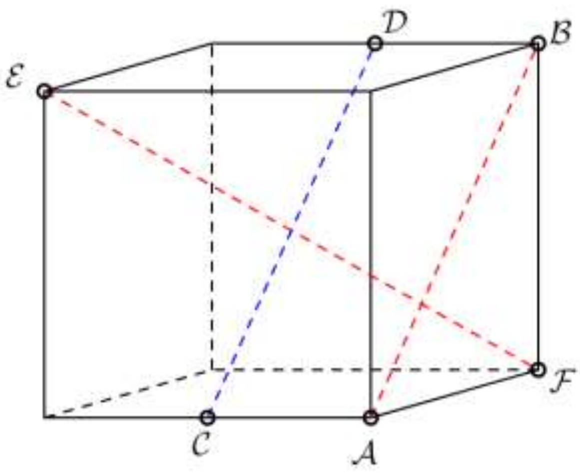


Resultan *AB*, *BC* y *CA* de igual longitud.

Problema 3. Hallar el ángulo entre la diagonal interior del cubo y la diagonal de una cara del cubo, indicadas en la figura.



Solución: Si *C* y *D* son los puntos medios de las aristas donde están ubicados, según la figura,

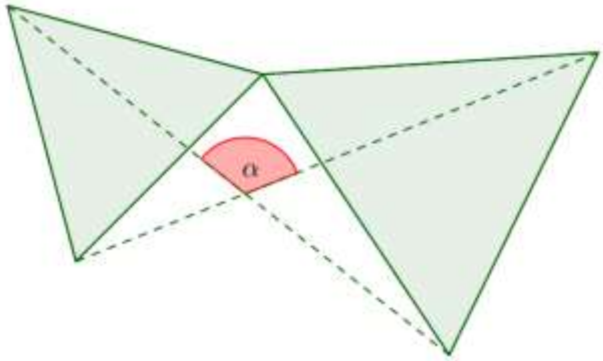


se forma el paralelogramo *ABDC*. Usando el Teorema de Pitágoras, resulta claro que tanto *C* como *D* equidistan de los vértices *E* y *F*, es decir, *C* y *D* están en el plano bisector de *EF*, entonces *CD* es perpendicular a *EF* y dado que *AB* es paralelo a *CD*, resulta *AB* perpendicular a *EF*.

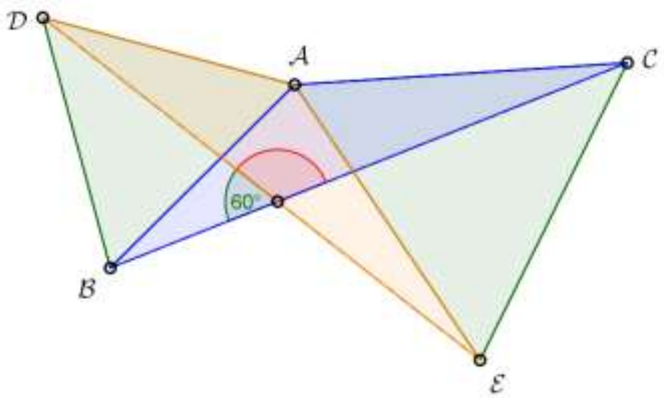
Otra forma de ver que *CD* es perpendicular a *EF*, es observar que ambos segmentos pasan por el centro del cubo y que *CFDE* es un rombo.

Tercer Nivel

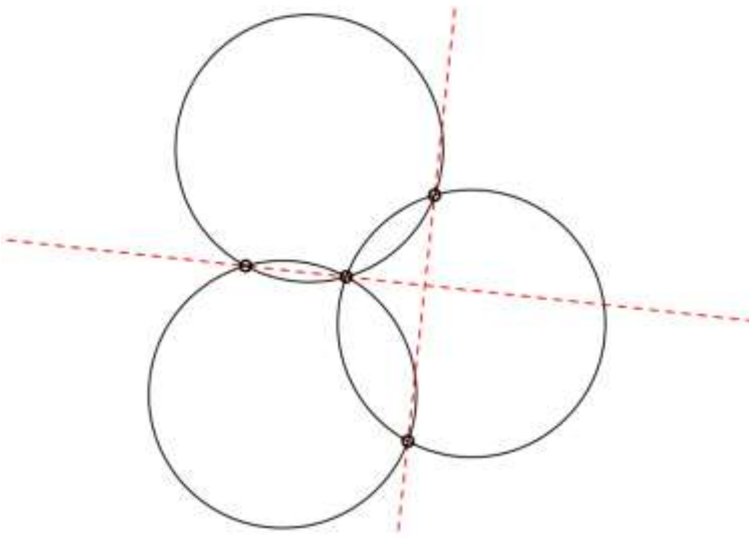
Problema 1. Los triángulos en la figura son equiláteros. Hallar el valor del ángulo α.



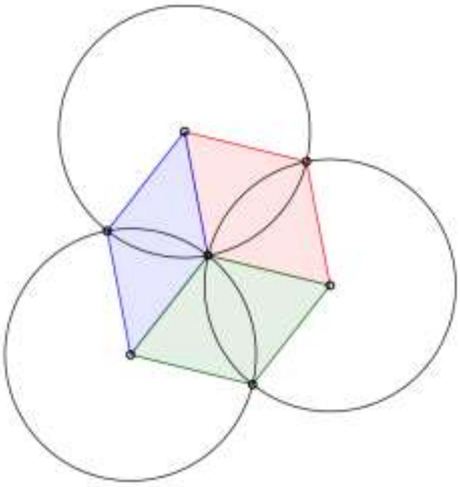
Solución: Si el triángulo *ABC* rota *60º* en sentido horario alrededor del vértice *A*, se transforma en el triángulo *ADE,* transformándose el lado *BC* en el lado *DE,* de modo que el ángulo entre estos segmentos es *60º* y del ángulo α mide *120º*.



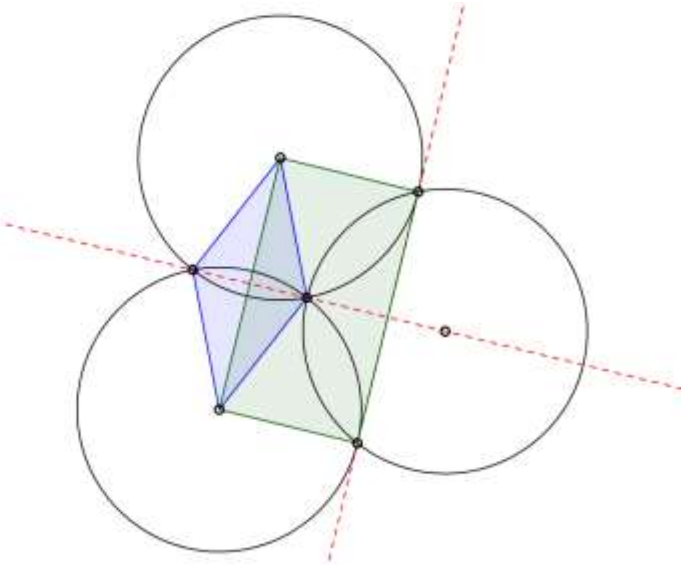
Problema 2. Tres circunferencias de igual radio, se cortan tal como muestra la figura. Hallar el ángulo entre las rectas que se indican en la misma figura.



Solución: Usamos los puntos de intersección y los centros de las circunferencias para formar tres rombos.

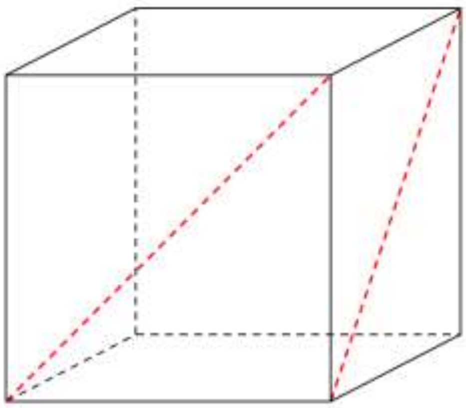


Ahora formamos un paralelogramo y un rombo.

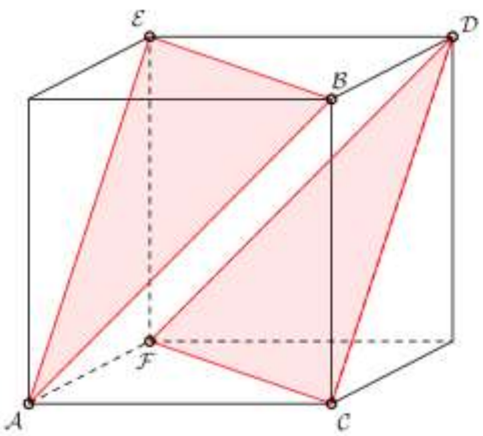


Una de las rectas dadas contiene una diagonal del rombo y la otra es paralela a la otra diagonal del rombo, entonces las rectas dadas son perpendiculares.

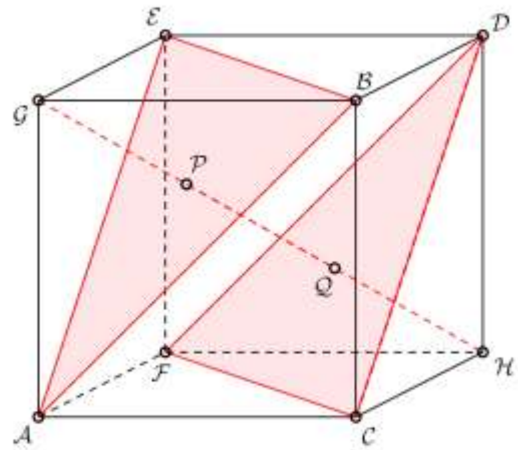
Problema 3. Hallar la distancia entre las diagonales de las caras del cubo, de *1cm* de arista, indicadas en la figura.



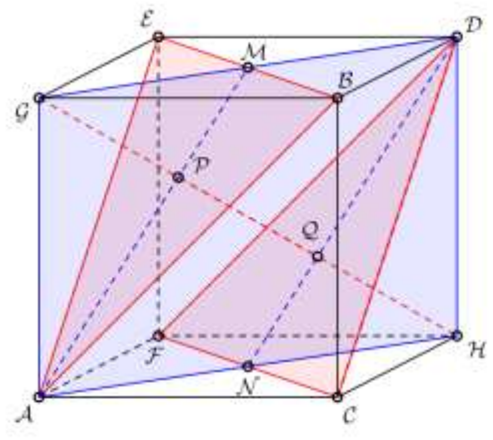
Solución: Dado que la diagonal *AE* es paralela a la diagonal *CD* y la diagonal *FD* es paralela a la diagonal *AB*, las caras opuestas del paralelepípedo circunscripto al tetraedro *ABCD* que contienen las aristas *AB* y *CD*, están en los planos paralelos determinados por los triángulos *ABE* y *CDF*. La distancia entre las aristas *AB* y *CD* del tetraedro es la distancia entre estos planos paralelos (ver Nota 7 de geometría, página 61).

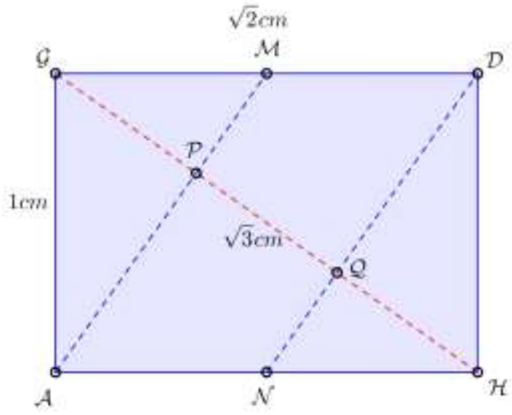


Puesto que los vértices del cubo, *G* y *H* están en el plano bisector de *AB* y *BE*, la diagonal interior *GH* es perpendicular al plano *ABE* y en consecuencia también es perpendicular al plano *CDF*.



La distancia entre los plano será la longitud del segmento *PQ*, donde *P* y *Q* son, respectivamente, los puntos donde *GH* corta a los planos *ABE* y C*DF*.
En el rectángulo *AHDG*





M y *N* son los puntos medios de *GD* y *AH* respectivamente y por el paralelismo de *AM* con *ND* resulta que *P* y *Q* dividen a la diagonal interior *GH* en tres partes iguales, por lo tanto la distancia buscada entre las diagonales de las caras del cubo será $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *cm.*